УДК 517.51

Д. Б. Танана

СИСТЕМЫ ВСПЛЕСКОВ ТИПА И. МЕЙЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ $L_p(\mathbb{R})$*

Теория всплесков динамично развивается на протяжении последних двух десятилетий. В основу этого раздела математики легли новаторские работы Ж. Морле, А. Гроссмана, И. Мейера, С. Малла, И. Добеши. Базисы, построенные И. Мейером, благодаря лаконичной конструкции и уникальным свойствам, занимают одно из центральных мест как в теоретическом, так и в прикладном аспектах теории всплесков.

Кратко напомним конструкцию исследуемого семейства базисов всплесков типа И. Мейера. Через $\widehat{f}(\xi)$ обозначим преобразование Фурье функции $f(x)$:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx.$$

Рассмотрим функцию $\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}_\varepsilon(\xi)$, $(0 < \varepsilon \leqslant 1/3)$, полагая

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| = \begin{cases} 1, & \text{если } |\xi| < (1-\varepsilon)/2; \\ 0, & \text{если } |\xi| > (1+\varepsilon)/2. \end{cases}$$

Доопределим $\widehat{\varphi}(\xi)$ на отрезке $(1-\varepsilon)/2 \leqslant |\xi| \leqslant (1+\varepsilon)/2$ таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $|\widehat{\varphi}(\xi)|$ на отрезке $[(1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2]$ имеет центр симметрии в точке $(1/2, 1/2)$;

2) $\widehat{\varphi}'(\xi)$ на отрезке $[-(1+\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2]$ является функцией ограниченной вариации.

На протяжении всей работы условия 1 и 2 будем считать выполненными. Также отметим, что в силу сделанных предположений для любого $\omega \in \operatorname{supp} \widehat{\varphi}$ значение $\widehat{\varphi}(\omega/2) = 1$.

Используя формулу интегрирования по частям, нетрудно доказать, что данные предположения обеспечивают следующую оценку для

$$\varphi(x) = F^{-1}(\widehat{\varphi}(\xi))(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i \xi x}\, d\xi.$$

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05-01-00409.

Существует константа $c = c(\varphi)$ такая, что для любого x

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{c}{1+x^2}.$$

Известно [3], что функция $\varphi(x)$ порождает ортонормированную систему $\{\varphi(x+k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ в $L_2(\mathbb{R})$ и последовательность вложенных подпространств

$$V_j = \operatorname{close span}(\{2^{j/2}\varphi(2^j x+k)\}_{k\in\mathbb{Z}}), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $|\widehat{\theta}(\xi)|^2 = |\widehat{\varphi}(\xi/2)|^2 - |\widehat{\varphi}(\xi)|^2$ и $\theta(x) = F^{-1}(\widehat{\theta}(\xi))(x)$. Тогда функция $\psi(x) = \theta(x-1/2)$ порождает ортонормированный базис $\{2^{j/2}\psi(2^j x+k)\}_{k\in\mathbb{Z},j\in\mathbb{Z}}$ пространства $L_2(\mathbb{R})$ и безусловные базисы всех $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$ [1], $(\varepsilon = 1/3)$ [3]. Заметим, что $|\widehat{\theta}(\xi)|^2 = 0$ при $|\xi| \leqslant (1-\varepsilon)/2$ и при $|\xi| \geqslant 1+\varepsilon$.

Через $W_{\sigma,p}$ обозначим класс целых функций экспоненциального типа σ. Функция $f(x) \in L_p(\mathbb{R})$ принадлежит данному классу, если она является следом на вещественной оси целой в комплексной плоскости функции $f(z)$ такой, что для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ $|f(z)| = O(e^{(\sigma+\delta)|z|})$ при $|z| \to \infty$. Для функции $f(x) \in W_{\sigma,p}$ рассмотрим вопрос об аппроксимативных свойствах следующих частичных сумм ряда Фурье по системе всплесков типа И. Мейера:

$$S_{2^j}(f,x) = 2^{j/2}\sum_k f_{j,k}\,\varphi(2^j x+k), \quad j \in \mathbb{Z},$$

где $f_{j,k}$ – коэффициент Фурье функции $f(x)$: $f_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} f(t)2^{j/2}\overline{\varphi(2^j t+k)}\,dt$. Напомним, что таким образом можно представить частичную сумму разложения функции $f(x)$ по системе всплесков, содержащую все члены ряда с $\psi_{\ell,k} = 2^{\ell/2}\psi(2^\ell x+k)$ при $\ell < j$; $\ell, k \in \mathbb{Z}$.

Известно следующее утверждение, приведенное с доказательством для полноты изложения.

Утверждение 1. *Пусть $f(x) \in L_p(\mathbb{R})$, $p \geqslant 1$. Тогда для любых $j, k \in \mathbb{Z}$ коэффициенты*

$$f_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} f(t)2^{j/2}\overline{\varphi(2^j t+k)}\,dt$$

являются конечными числами.

Доказательство. Выберем произвольные целые k и j. С учетом оценки $|\widehat{\varphi}(x)| \leqslant c/(1+x^2)$ имеем

$$|f_{j,k}| \leqslant 2^{j/2}\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\frac{c}{1+|2^j t+k|^2}\,dt.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$|f_{j,k}| \leqslant 2^{j/2} c \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1 + |(2^j t + k)|^2} \right)^q dt \right)^{1/q} < \infty,$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ или $q = \frac{p}{p-1} > 1$ (при $p \geqslant 1$). Утверждение доказано.

Найдем более удобное выражение для частичной суммы:

$$S_{2^j}(F, x) = 2^{j/2} \sum_k F_k \, \varphi(2^j x + k),$$

где

$$F_k = \int_{\mathbb{R}} F(t) \, 2^{j/2} \, \overline{\varphi(2^j t + k)} \, dt.$$

Утверждение 2. *Пусть* $F(x) \in W_{\sigma,2}$ *и* $\sigma \leqslant 2^j (\frac{1-\varepsilon}{2})$, *тогда* $F_k = 2^{-j/2} F(-\frac{k}{2^j})$.

Доказательство. В самом деле,

$$F_k = \int_{\mathbb{R}} F(t) \, 2^{j/2} \, \overline{\varphi(2^j t + k)} \, dt = 2^{j/2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(\omega) \, (\overline{\varphi(2^j t + k)})\widehat{\ } (\omega) \, d\omega.$$

Имеем $(\varphi(2^j t + k))\widehat{\ }(\omega) = 2^{-j} \, e^{2\pi i k \omega / 2^j} \, \widehat{\varphi}(\omega/2^j)$. Таким образом

$$F_k = 2^{-j/2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(\omega) \, \overline{\widehat{\varphi}(\omega/2^j)} \, e^{-2\pi i k \omega / 2^j} \, d\omega.$$

Из условий на $F(x)$ по теореме Винера [4] следует, что $\operatorname{supp} \widehat{F}(\omega) \subset [-\sigma, \sigma]$, и по построению $\widehat{\varphi}(\omega/2^j) = 1$ для любого $\omega \subset [-\sigma, \sigma]$. Тогда

$$F_k = 2^{-j/2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(\omega) \, e^{-2\pi i k \omega / 2^j} \, d\omega = 2^{-j/2} F \left(-\frac{k}{2^j} \right).$$

Утверждение доказано.

Таким образом, получено следующее представление суммы $S_{2^j}(F, x)$:

$$S_{2^j}(F, x) = \sum_k F \left(-\frac{k}{2^j} \right) \varphi(2^j x + k).$$

Вначале ограничимся рассмотрением случая $p \geqslant 2$.

Утверждение 3. *Пусть* $f(x) \in W_{\sigma,p}$ $(p \geqslant 2)$. *Тогда* $F(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \in W_{\sigma,2}$.

Доказательство. Положим $F(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$. Доопределим функцию $F(z)$ в точке $z = 0$: $F(0) = f'(0)$. Ясно, что $F(z)$ – целая функция. Также при $|z| \to \infty$ сохраняется оценка функции $F(z) = O(e^{(\sigma+\delta)|z|})$ для сколь угодно малого $\delta > 0$. Функция $F(x)$ является следом на вещественной оси функции $F(z)$. Осталось доказать, что $F(x) \in L_2(\mathbb{R})$.

Имеем при $R > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|^2 dx =$$
$$= \int_{|x|<R} \left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|^2 dx + \int_{|x|\geqslant R} \left|\frac{f(x)}{x} - \frac{f(0)}{x}\right|^2 dx.$$

Первое слагаемое конечно, так как $F(x)$ ограничена на конечном отрезке.

Оценим второе слагаемое. Используя соотношение $|a-b|^2 \leqslant 2|a|^2 + 2|b|^2$, и неравенство Гельдера при $p > 2$, получаем

$$\int_{|x|\geqslant R} \left|\frac{f(x)}{x} - \frac{f(0)}{x}\right|^2 dx \leqslant 2\int_{|x|\geqslant R} \frac{|f(x)|^2}{x^2}\, dx + 2|f^2(0)| \int_{|x|\geqslant R} \frac{1}{x^2}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant 2\left(\int_{|x|\geqslant R} (|f(x)|^2)^{p/2} dx\right)^{2/p} \cdot \left(\int_{|x|\geqslant R} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{p/(p-2)} dx\right)^{(p-2)/p} +$$
$$+ 2|f^2(0)| \int_{|x|\geqslant R} \frac{1}{x^2}\, dx.$$

Каждый из приведенных интегралов конечен, так как $f(x) \in L_p(\mathbb{R})$. Если $p = 2$, то второй сомножитель в итоговом выражении следует заменить на $\max\{1/x^2 : \ |x| \geqslant R\} = 1/R^2$.

Значит, $F(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Таким образом, $F(x) \in W_{\sigma,2}$. Утверждение доказано.

И. Новиков в работе [2] фактически доказал, что если $F(x)$ из $W_{\sigma,2}$ и функция И. Мейера $\widehat{\varphi}(\xi)$ бесконечно дифференцируема, то при $\varepsilon = 1/3$ и $\sigma \leqslant 2^j(1-\varepsilon)/2$ верно равенство $S_{2^j}(F,x) = F(x)$, и как следствие получил оценку типа Джексона уклонения $F(x)$ от $S_{2^j}(F,x)$ для $F(x) \in L_2(\mathbb{R})$. В работе [6] для этого же класса функций $F(x) \in W_{\sigma,2}$ при более слабых ограничениях на $\widehat{\varphi}(\xi)$ доказано аналогичное равенство: $S_{2^j}(F,x) = F(x)$, а именно, если для функции $\varphi(x)$ выполнено условие: $\widehat{\varphi}\,'(\xi)$ на $[-(1+\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2]$ является функцией ограниченной вариации.

Обобщим это свойство частичной суммы на случай $W_{\sigma,p}$.

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in W_{\sigma,p}$ *и* $p > 2$, $\sigma \leqslant 2^j(\frac{1-\varepsilon}{2})$. *Тогда* $S_{2^j}(f,x) = f(x)$.

Доказательство. Заметим, что, в силу вышеизложенного, при $p = 2$ утверждение теоремы также верно. Пусть $f(x)$ – произвольная функция из $W_{\sigma,p}$. Основная идея доказательства состоит в представлении $f(x)$ и $S_{2^j}(f,x)$ в виде рядов по базису $\{2^{(j+1)/2}\varphi(2^{j+1}x + k)\}_{k\in Z}$ пространства V_{j+1}, их преобразовании и сравнении между собой. Не уменьшая общности, можно считать, что четная функция $\widehat{\varphi}(\omega)$ вещественнозначна.

Получим такое разложение для функции $f(x)$. Рассмотрим функцию $x\varphi(2^jx+k)$. Докажем, что эта функция принадлежит $W_{\sigma_1,2}$, где $\sigma_1 = 2^{j+1}(\frac{1-\varepsilon}{2})$. В самом деле, оценим скорость убывания целой функции $z\varphi(2^jz + k)$ при $|z| \to \infty$. Так как $\operatorname{supp}(\widehat{\varphi(2^jx + k)}(\omega)) \subset [-2^j(\frac{1+\varepsilon}{2}), 2^j(\frac{1+\varepsilon}{2})]$, имеем

$$|\varphi(2^jz + k)| \leqslant C_1 e^{2^j(\frac{1+\varepsilon}{2})|z|}.$$

Тогда

$$|z\varphi(2^jz + k)| \leqslant |z| \cdot |\varphi(2^jz + k)|.$$

Поскольку для любого $\delta > 0$ $|z| = o(e^{\delta|z|})$ при $|z| \to \infty$, то $z\varphi(2^jz + k)$ – целая функция экспоненциального типа σ_1. Покажем, что $x\varphi(2^jx + k) \in L_2(\mathbb{R})$. Оценим интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} |x\varphi(2^jx + k)|^2\, dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(1 + x^2)^2}\, dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1 + x^2} < \infty.$$

Таким образом, функция $x\varphi(2^jx + k) \in W_{\sigma_1,2}$. Тогда по сформулированным непосредственно перед теоремой 1 результатам для этой функции выполнено тождество

$$S_{2^{j+1}}(x\varphi(2^jx + k), x) = x\varphi(2^jx + k).$$

Преобразуем данный ряд, основываясь на результатах утверждения 2:

$$x\varphi(2^jx + k) = \sum_{\nu} \left((t\varphi(2^jt + k)) \big|_{t=-\nu/2^{j+1}} \right) \varphi(2^{j+1}x + \nu) =$$
$$= \sum_{\nu} -\frac{\nu}{2^{j+1}}\, \varphi\left(-\frac{\nu}{2} + k\right) \varphi(2^{j+1}x + \nu).$$

Возвращаясь к рассмотрению функции $f(x)$, имеем $F(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$, $f(x) = f(0) + xF(x)$. В силу утверждения 3, $F(x) \in W_{\sigma,q}$, $q = 2$ и, значит, $F(x) = S_{2^j}(F, x)$.

Получим

$$f(x) = f(0) + xS_{2^j}(F, x) = f(0) + x\sum_{k} F\left(-\frac{k}{2^j}\right) \varphi(2^jx + k) =$$

$$= f(0) + \sum_k F\left(-\frac{k}{2^j}\right) x\varphi(2^j x + k).$$

Подставляя выражение, полученное для $x\varphi(2^j x + k)$, имеем

$$f(x) = f(0) + \sum_k F\left(-\frac{k}{2^j}\right) \sum_\nu -\frac{\nu}{2^{j+1}}\varphi\left(-\frac{\nu}{2} + k\right) \varphi(2^{j+1}x + \nu).$$

Окончательное разложение получим, используя равенство

$$f(0) = \sum_\nu f(0)\varphi(2^{j+1}x + \nu).$$

Обоснуем его правильность.

Рассмотрим ряд $\sum_\nu \varphi(2^{j+1}x + \nu)$, сходящийся равномерно на любом конечном отрезке. Функция

$$g(x) = \sum_\nu \varphi(2^{j+1}x + \nu)$$

является $1/2^{j+1}$-периодической функцией. Тогда $g(x)$ представима в виде ряда

$$g(x) = \sum_\ell \left(g_\ell e^{2\pi i 2^{j+1} x\ell},\, g_\ell\right) = 2^{j+1}\int_0^{\frac{1}{2^{j+1}}} \sum_\nu \varphi(2^{j+1}x + \nu) e^{-2\pi i 2^{j+1} x\ell}\, dx.$$

Интегрируя ряд почленно, получим

$$g_\ell = 2^{j+1} \sum_\nu \int_0^{\frac{1}{2^{j+1}}} \varphi(2^{j+1}x + \nu) e^{-2\pi i 2^{j+1} x\ell}\, dx.$$

Выполним замену $t = 2^{j+1}x + \nu$,

$$g_\ell = \sum_\nu \int_\nu^{\nu+1} \varphi(t) e^{-2\pi i\ell(t-\nu)}\, dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2\pi i\ell t}\, dt = \widehat{\varphi}(\ell).$$

По определению $\widehat{\varphi}(\xi)$ имеем $\widehat{\varphi}(\ell) = \delta_{\ell,0}$, $\ell \in \mathbb{Z}$, и, следовательно, $g_\ell = \delta_{\ell,0}$, $\ell \in \mathbb{Z}$, т. е. $g_0 = \widehat{\varphi}(0) = 1$, $g(x) = \sum_\nu \varphi(2^{j+1}x + \nu) = 1$, что и доказывает искомое равенство для $f(0)$.

В итоге получаем следующее представление:

$$f(x) = \sum_\nu f(0)\varphi(2^{j+1}x + \nu) +$$
$$+ \sum_k F\left(-\frac{k}{2^j}\right) \sum_\nu \left(-\frac{\nu}{2^{j+1}}\, \varphi\left(-\frac{\nu}{2} + k\right) \varphi(2^{j+1}x + \nu)\right).$$

Полученный двойной ряд сходится абсолютно на любом конечном отрезке. Меняя порядок суммирования, получим

$$f(x)=\sum_{\nu}\varphi(2^{j+1}x+\nu)\left(f(0)+\sum_{k}F\left(-\frac{k}{2^j}\right)\left(-\frac{\nu}{2^{j+1}}\varphi\left(k-\frac{\nu}{2}\right)\right)\right).$$

Найдем соответствующее выражение для $S_{2^j}(f,x)$. Поскольку $V_j\subset V_{j+1}$, то $2^{j/2}\varphi(2^jx+k)=S_{2^{j+1}}(2^{j/2}\varphi(2^jx+k),x)$. Таким образом, имеем

$$2^{j/2}\varphi(2^jx+k)=S_{2^{j+1}}(2^{j/2}\varphi(2^jx+k),x)=$$

$$=\sum_{\nu}\int_{\mathbb{R}}2^{j/2}\varphi(2^jt+k)\,2^{\frac{j+1}{2}}\,\overline{\varphi(2^{j+1}t+\nu)}\,dt\cdot 2^{\frac{j+1}{2}}\,\varphi(2^{j+1}x+\nu).$$

Применяя равенство Парсеваля и учитывая, что

$$\widehat{\varphi(2^jx+k)}(\omega)=2^{-j}e^{2\pi ik\omega/2^j}\,\widehat{\varphi}(\omega/2^j),$$

получим

$$\begin{aligned}&2^{j/2}\varphi(2^jx+k)=\\&=2^{j/2}\sum_{\nu}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2^j}e^{2\pi i\frac{k}{2^j}\omega}\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)e^{-2\pi i\frac{\nu}{2^{j+1}}\omega}\overline{\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}\,d\omega\cdot\varphi(2^{j+1}x+\nu)=\\&=\sum_{\nu}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2^{j/2}}\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\overline{\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}e^{2\pi i\frac{\omega}{2^j}(k-\frac{\nu}{2})}\,d\omega\cdot\varphi(2^{j+1}x+\nu).\end{aligned}$$

Подставляя данное представление в $S_{2^j}(f,x)$, получим

$$\begin{aligned}S_{2^j}(f,x)&=\sum_{k}f_{j,k}2^{j/2}\varphi(2^jx+k)=\\&=\sum_{k}f_{j,k}\sum_{\nu}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2^{j/2}}\,\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\,\overline{\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}\,e^{2\pi i\frac{\omega}{2^j}\,(k-\frac{\nu}{2})}\,d\omega\cdot\varphi(2^{j+1}x+\nu).\end{aligned}$$

Так как двойной ряд сходится абсолютно, то

$$S_{2^j}(f,x)=\sum_{\nu}\varphi(2^{j+1}x+\nu)\sum_{k}f_{j,k}b^j_{k\nu},$$

где

$$b^j_{k\nu}=2^{-j/2}\int_{\mathbb{R}}\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\overline{\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)}\,e^{2\pi i\frac{\omega}{2^j}\,(k-\frac{\nu}{2})}\,d\omega.$$

Преобразуем коэффициенты $f_{j,k}$, $b^j_{k\nu}$:

$$f_{j,k}=2^{j/2}\int_{\mathbb{R}}f(t)\,\overline{\varphi(2^jt+k)}\,dt=2^{j/2}\int_{\mathbb{R}}(f(0)+tF(t))\,\overline{\varphi(2^jt+k)}\,dt=$$

$$= f(0)\int_{\mathbb{R}} 2^{j/2}\overline{\varphi(2^j t+k)}\, e^{-2\pi i t 0}\, dt + \int_{\mathbb{R}} 2^{j/2} tF(t)\,\overline{\varphi(2^j t+k)}\, dt.$$

Отдельно упростим второе слагаемое:

$$\int_{\mathbb{R}} 2^{j/2} tF(t)\,\overline{\varphi(2^j t+k)}\, dt = \int_{\mathbb{R}} 2^{-j/2} F(t)(2^j t+k-k)\,\overline{\varphi(2^j t+k)}\, dt =$$

$$= 2^{-j/2}\int_{\mathbb{R}} F(t)(2^j t+k)\,\overline{\varphi(2^j t+k)}\, dt - 2^{-j/2}\int_{\mathbb{R}} F(t)k\,\overline{\varphi(2^j t+k)}\, dt.$$

Применяя равенство Парсеваля к функциям $F(t)$ и $(2^j t+k)\varphi(2^j t+k)$, имеем

$$\int_{\mathbb{R}} 2^{j/2} tF(t)\,\overline{\varphi(2^j t+k)}\, dt = 2^{-j/2}\int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(\omega)\frac{1}{2^j}\,\widehat{\left(\overline{x\varphi(x)}\right)}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) e^{-2\pi i \frac{k}{2^j}\omega}\, d\omega -$$

$$- 2^{-j/2}k\int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(\omega)\frac{1}{2^j}\,\overline{\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)} e^{-2\pi i \frac{k}{2^j}\omega}\, d\omega.$$

Учитывая, что

$$\widehat{(x\varphi(x))}(\omega) = -\frac{1}{2\pi i}(\widehat{\varphi}(\omega))',$$

получим

$$\int_{\mathbb{R}} 2^{j/2} tF(t)\,\overline{\varphi(2^j t+k)}\, dt = 2^{-j/2}\int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(\omega)\frac{1}{2^j}\cdot\frac{1}{2\pi i}\overline{\left(\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right)'} e^{-2\pi i \frac{k}{2^j}\omega}\, d\omega -$$

$$- 2^{-j/2}k\int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(\omega)\frac{1}{2^j}\,\overline{\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)} e^{-2\pi i \frac{k}{2^j}\omega}\, d\omega.$$

Так как $F(x)\in W_{\sigma,2}$, $\sigma\leqslant 2^j(\frac{1-\varepsilon}{2})$, $\operatorname{supp}\widehat{F}(\omega)\subset[-2^j(\frac{1-\varepsilon}{2}), 2^j(\frac{1-\varepsilon}{2})]$ и на этом интервале $\widehat{\varphi}(\frac{\omega}{2^j})=1$, то

$$2^{-j/2}\int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(\omega)\frac{1}{2^j}\cdot\frac{1}{2\pi i}\overline{\left(\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right)'} e^{-2\pi i \frac{k}{2^j}\omega} d\omega = 0$$

и

$$-2^{-j/2}k\int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(\omega)\frac{1}{2^j}\overline{\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)} e^{-2\pi i \frac{k}{2^j}\omega} d\omega = -2^{-\frac{3}{2}j}kF\left(-\frac{k}{2^j}\right).$$

Из полученных выражений находим

$$f_{j,k} = -2^{-\frac{3}{2}j}kF\left(-\frac{k}{2^j}\right) + f(0)2^{-j/2}.$$

Аналогичным образом преобразуем $b^j_{k\nu}$.

Выполним замену $t = \omega/2^j$ и учтем, что на $\operatorname{supp}\widehat{\varphi}(t)$ значение $\widehat{\varphi}(t/2) = 1$. Получим

$$b^j_{k\nu} = 2^{j/2}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(t)\, e^{2\pi i t\left(k-\frac{\nu}{2}\right)}\, dt = 2^{j/2}\varphi\left(k-\frac{\nu}{2}\right).$$

Подставляя найденные выражения для коэффициентов $f_{j,k}$, $b^j_{k\nu}$ в $S_{2^j}(f,x)$, получим

$$S_{2^j}(f,x) =$$
$$= \sum_\nu \varphi(2^{j+1}x+\nu)\sum_k\left(-2^{-\frac{3}{2}j}kF\left(-\frac{k}{2^j}\right)+f(0)2^{-j/2}\right)\left(2^{j/2}\varphi\left(k-\frac{\nu}{2}\right)\right) =$$
$$= \sum_\nu \varphi(2^{j+1}x+\nu)\sum_k\left(-k2^{-j}kF\left(-\frac{k}{2^j}\right)+f(0)\right)\left(\varphi\left(k-\frac{\nu}{2}\right)\right).$$

Так как $\sum_k \varphi(k-\frac{\nu}{2}) = 1$ для любого ν, то

$$S_{2^j}(f,x) = \sum_\nu \varphi(2^{j+1}x+\nu)\left(f(0)-\sum_k k2^{-j}F\left(-\frac{k}{2^j}\right)\varphi\left(k-\frac{\nu}{2}\right)\right).$$

Для доказательства утверждения теоремы осталось обосновать, что для любого ν верно следующее равенство:

$$\frac{\nu}{2}\sum_k F\left(-\frac{k}{2^j}\right)\varphi\left(k-\frac{\nu}{2}\right) = \sum_k kF\left(-\frac{k}{2^j}\right)\varphi\left(k-\frac{\nu}{2}\right),$$

или

$$\sum_k F\left(-\frac{k}{2^j}\right)\varphi\left(k-\frac{\nu}{2}\right)\left(k-\frac{\nu}{2}\right) = 0.$$

Известно, что 1-периодизация функции $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$: $P(f,x) = \sum_\ell f(x+\ell)$ принадлежит $L_1([0,1])$ и данный ряд сходится почти всюду. Из формулы суммирования Пуассона следует, что

$$P(f,x) = \sum_k \widehat{f}(k)\, e^{2\pi i k x}.$$

В частности, для функции $\widehat{F}(\omega)$

$$P(\widehat{F},\xi) = \sum_k (\widehat{F}(\cdot))\widehat{\ }(k)\, e^{2\pi i k\xi}.$$

Аналогично

$$P(\widehat{F}(2^j t),\xi) = \sum_k (\widehat{F}(2^j t))\widehat{\ }(k)\, e^{2\pi i k\xi} = \sum_k \frac{1}{2^j}F\left(-\frac{k}{2^j}\right)e^{2\pi i k\xi}.$$

Таким образом, числа $\frac{1}{2^j}F(-\frac{k}{2^j})$ – коэффициенты Фурье функции $P(\widehat{F}(2^jt),\xi)$.

Рассмотрим функцию $x\varphi(x)$. Так как $(\widehat{\varphi}(\omega))' = -2\pi i(x\varphi(x))\widehat{\ }(\omega)$, то

$$P((\widehat{\varphi}(t))',\xi) = \sum_k (\widehat{\varphi}(t)')\widehat{\ }(k)\, e^{2\pi ik\xi} =$$
$$= \sum_k -2\pi i(-k)\,\varphi(-k)\,e^{2\pi ik\xi} = \sum_k 2\pi ik\,\varphi(-k)\,e^{2\pi ik\xi}.$$

Аналогично, используя равенство

$$(\widehat{\varphi}(t))'(\omega)e^{2\pi i\frac{\nu}{2}\omega} = \left(g\left(t+\frac{\nu}{2}\right)\right)\widehat{\ }(\omega)\,,$$

где $g(t) = -2\pi it\,\varphi(t)$, получим

$$P\left((\widehat{\varphi}(t))'e^{2\pi i\frac{\nu}{2}\omega},\xi\right) = \sum_k ((\widehat{\varphi}(t))'(\omega)e^{2\pi i\frac{\nu}{2}\omega})\widehat{\ }(k)\,e^{2\pi ik\xi} =$$
$$= \sum_k \left(\left(g\left(t+\frac{\nu}{2}\right)\right)\widehat{\ }(\omega)\right)\widehat{\ }(k)\,e^{2\pi ik\xi} = \sum_k g\left(-k+\frac{\nu}{2}\right)e^{2\pi ik\xi} =$$
$$= \sum_k (-2\pi i)\left(-k+\frac{\nu}{2}\right)\varphi\left(-k+\frac{\nu}{2}\right)e^{2\pi ik\xi}.$$

Таким образом, $-2\pi i\left(\frac{\nu}{2}-k\right)\varphi\left(\frac{\nu}{2}-k\right)$ являются коэффициентами Фурье функции $P\left((\widehat{\varphi}(t))'e^{2\pi i\frac{\nu}{2}\omega},\xi\right)$.

Применяя равенство Парсеваля и учитывая вещественность и четность функции $\varphi(x)$, получим

$$I = \frac{-2\pi i}{2^j}\sum_k F\left(-\frac{k}{2^j}\right)\left(k-\frac{\nu}{2}\right)\varphi\left(k-\frac{\nu}{2}\right) =$$
$$= \sum_k \frac{1}{2^j}F\left(-\frac{k}{2^j}\right)\overline{\left(-2\pi i\left(-k+\frac{\nu}{2}\right)\varphi\left(-k+\frac{\nu}{2}\right)\right)} =$$
$$= \int_0^1 P\left(\widehat{F}(2^jt),\xi\right)\overline{(P((\widehat{\varphi}(t))'e^{2\pi i\frac{\nu}{2}\omega},\xi))}\,d\xi.$$

В силу 1-периодичности подынтегральной функции промежуток интегрирования $[0,1]$ можно заменить на $[-1/2,1/2]$. Поэтому

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} P\left(\widehat{F}(2^jt),\xi\right)\overline{P((\widehat{\varphi}(t))'e^{2\pi i\frac{\nu}{2}\omega},\xi)}\,d\xi.$$

Поскольку $\mathrm{supp}(\widehat{F}(2^j\xi))$ принадлежит отрезку $[-(1-\varepsilon)/2,(1-\varepsilon)/2]$, на $[-1/2,1/2]$ $P(\widehat{F}(2^jt),\xi)=\widehat{F}(2^j\xi)$, функция $\widehat{\varphi}(t)$ четная и $\widehat{\varphi}(t)=1$ на отрезке $[-(1-\varepsilon)/2,(1-\varepsilon)/2]$, заключаем, что $(\widehat{\varphi}(t))'$ – нечетная функция и $(\widehat{\varphi}(t))'=0$ при $t\in[-(1-\varepsilon)/2,(1-\varepsilon)/2]$ и при $|t|>(1+\varepsilon)/2$.

Таким образом

$$P((\widehat{\varphi}(t))'e^{2\pi i\frac{\nu}{2}\omega},\xi)=\sum_{\ell=-1}^{1}\widehat{\varphi}'(\xi+\ell)\,e^{2\pi i\frac{\nu}{2}(\xi+\ell)}.$$

Носитель данной функции расположен на $[-\frac{1+\varepsilon}{2},-\frac{1-\varepsilon}{2}]\bigcup[\frac{1-\varepsilon}{2},\frac{1+\varepsilon}{2}]$. Сравнивая с носителем первого сомножителя, заключаем что $I=0$. Теорема доказана.

Замечание. Для случая функции $f(x)\in W_{\sigma,p}$, $1\leqslant p<2$, аналогичное утверждение также верно. Для любых $q,q'>0$ таких, что $q'\geqslant q$, и для любой $f(x)\in W_{\sigma,q}$ имеем оценку

$$||f||_{q'}\leqslant\left(\frac{q_0\sigma}{2\pi}\right)^{1/q-1/q'}||f||_q,$$

где $||f||_p=\left(\int_{\mathbb{R}}|f(t)|^pdt\right)^{1/p}$ [4]. Поэтому, если $f(x)\in W_{\sigma,p}$, $1\leqslant p<2$, то, применяя данное утверждение при $q'=2$, $q=p$, получим $f(x)\in W_{\sigma,2}$. Таким образом, утверждение теоремы верно для любой $f(x)\in W_{\sigma,p}$, $p\geqslant 1$.

Доказанное выше утверждение позволяет оценить скорость сходимости ряда Фурье по системе всплесков И. Мейера в пространстве $L_p(\mathbb{R})$, $p\geqslant 1$, в сравнении с $E_\sigma(f,L_p)$ – наилучшим приближением соответствующей функции целыми функциями экспоненциального типа σ. Пусть $g_\sigma(x,f)$ – целая функция экспоненциального типа σ, обеспечивающая наилучшее приближение функции $f(x)$ в пространстве $L_p(\mathbb{R})$, $p\geqslant 1$.

Теорема 2. *Пусть $f(x)\in L_p(\mathbb{R})$, $p\geqslant 1$. Тогда $||f-S_{2^j}(f,x)||_{L_p}\leqslant cE_{\frac{2^j}{3}}(f,L_p)$, где c – константа, зависящая только от функции φ_ε.*

Доказательство. Пусть $L=\sup_{j\in Z}||S_{2^j}||_{L_p(\mathbb{R})\to L_p(\mathbb{R})}$, $p\geqslant 1$. В работах [3, 5] установлено, что $L<\infty$. Рассмотрим произвольную функцию $f(x)\in L_p(\mathbb{R})$, $p\geqslant 1$. Имеем при $\sigma\leqslant 2^j(1-\varepsilon)/2$

$$\begin{aligned}||f-S_{2^j}(f,x)||_{L_p}&\leqslant||f-g_\sigma(x,f)||_{L_p}+||S_{2^j}(f-g_\sigma(x,f),x)||\leqslant\\&\leqslant(1+L)||f-g_\sigma(x,f)||_{L_p}\leqslant cE_{\frac{2^j}{3}}(f,L_p).\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Литература

1. Meyer Y. Ondelettes et Operateus Ondelettes, Actualites Mathematiques. P.: Herman, 1990.
2. Новиков И.Я. Онделетты И. Мейера – оптимальный базис в $C(0,1)$ // Матем. заметки. 1992. Т. 52, вып. 5. С. 88–91.
3. Offin D., Oskolkov K. A note on orthnormal polynomial bases and wavelets // Constr. Approx. 1993. Vol. 9. P. 319–325.
4. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
5. Субботин Ю. Н., Черных Н. И. Всплески в пространствах гармонических функций // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64, № 1. С. 145–174.
6. Танана Д. Б. Оценка скорости сходимости рядов по системам всплесков в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. // Проблемы теоретической и прикладной математики: Тр. 32-й Регион. молодеж. конф. Екатеринбург, 2001. С. 57–61.